

# LOGIKA I TEORIA MNOGOŚCI

## Opis przedmiotu

### INFORMACJE OGÓLNE

1. Nazwa przedmiotu: Logika i teoria mnogości
2. Kod przedmiotu: DLTM LI0
3. Semestr: letni
4. Liczba godzin: 30 – wykłady, 30 – ćwiczenia/laboratoria
5. ECTS: 6

### INFORMACJE SZCZEGÓLWE

1. Celem przedmiotu jest zapoznanie z podstawowymi pojęciami logiki i teorii mnogości. Informacja o pewnych zastosowaniach w informatyce. Nauczenie studentów wykonywania najważniejszych procedur algorytmicznych w logice oraz operowania pojęciami i symboliką teorii mnogości.
2. Wymaganie wstępne w zakresie wiedzy, umiejętności oraz kompetencji społecznych: Elementy szkolnej matematyki.

### ZALECANA LITERATURA

1. R. Murawski i K. Świrydowicz, Elementy logiki i teorii mnogości.
2. R. Murawski i K. Świrydowicz, Wstęp do teorii mnogości.
3. M. Ben-Ari, Logika matematyczna w informatyce.
4. W. Buszkowski, Elementy logiki I, II, Elementy teorii mnogości I, II (prezentacje).

### SYLABUS

#### Wykłady:

1. Spójniki logiczne, logiczne schematy zdań, tautologie rachunku zdań. Tablice prawdziwościowe spójników logicznych. Formuły rachunku zdań. Wartościowania. Wartość formuły dla danego wartościowania. Tablica prawdziwościowa formuły. Definicja tautologii rachunku zdań. Lista ważnych tautologii. Definicje logicznej równoważności, logicznego wynikania i spełnialności. Związki między tymi pojęciami. Podstawianie w rachunku zdań.
2. Logiczne reguły wnioskowania, sprawdzanie reguł, wnioskowania dedukcyjne. Wnioskowanie i schemat wnioskowania. Definicja logicznej reguły wnioskowania rachunku zdań. Związek między regułami a tautologiami.
3. Koniunkcyjna i alternatywna postać normalna, metody sprowadzania formuły do postaci normalnej, zastosowania do sprawdzania tautologii i spełnialności oraz w układach logicznych.
4. Kwantyfikatory, funkcje zdaniowe, termy i formuły, prawa rachunku kwantyfikatorów, prawa równości. Budowa języka elementarnego. Wolne i związane wystąpienia zmiennych. Interpretacje języka. Pojęcia prawa (tautologii) rachunku predykatów, modelu zbioru formuł, logicznego wynikania. Lista ważnych praw i reguł rachunku predykatów. Skrócone dowody równoważnościowe i implikacyjne. Prawa równości..
5. Formalne systemy dedukcyjne. Informacja o systemie dedukcyjnym klasycznego rachunku zdań w stylu Hilberta. Reguły systemu sekwentowego.
6. Podstawowe pojęcia teorii mnogości, aksjomat ekstensjonalności, aksjomaty istnienia zbiorów. Pojęcie zbioru i stosunek należenia elementu do zbioru. Oznaczenia zbiorów skończonych/ Zbiór wyznaczony przez warunek. Antynomia Russella. Aksjomaty ekstensjonalności, wyróżniania, zbioru pustego, pary, sumy i zbioru potęgowego.
7. Działania na zbiorach, stosunek inkluzji, prawa algebry zbiorów, wyprowadzanie tych praw za pomocą aksjomatu ekstensjonalności i praw rachunku zdań.
8. Algebry Boole'a. Aksjomaty algebry Boole'a dla zbiorów. Zasada dualności.
9. Pary uporządkowane, iloczyn kartezyjski, relacje. Definicje pary uporządkowanej i iloczynu (produktu) kartezyjskiego. Lemat o parach uporządkowanych. Układy uporządkowane (krotki)

- i iloczyn kartezjański kilku zbiorów. Relacje wieloargumentowe. Własności relacji binarnych. Złożenie relacji i relacja odwrotna. Prawa algebry relacji.
10. Funkcje. Definicja funkcji jako relacji prawostronnie jednoznacznej. Definicja funkcji ze zbioru  $X$  w (na) zbiór  $Y$ . Definicja funkcji różnowartościowej. Odwzorowania, iniekcja, suriekcja, bijekcja. Podstawowe własności funkcji. Obrazy i przeciwobrazy. Indeksowane rodziny zbiorów i działania nieskończone. Ciągi. Struktury relacyjne. Homomorfizm i izomorfizm.
  11. Relacje równoważności. Definicje relacji równoważności, klasy abstrakcji i zbioru ilorazowego. Zasada abstrakcji. Definicja relacji równoważności zgodnej z działaniami (kongruencji) i działań ilorazowych. Konstrukcje liczb całkowitych i wymiernych.
  12. Relacje porządkujące. Definicje relacji częściowo porządkującej i liniowo porządkującej. Diagram Hassego skończonego zbioru uporządkowanego. Definicje elementu najmniejszego, największego, minimalnego, maksymalnego, ograniczenia dolnego i górnego, kresu dolnego i górnego. Konstrukcja liczb rzeczywistych jako przekrojów Dedekinda w zbiorze liczb wymiernych. Zbiory dobrze uporządkowane. Aksjomat wyboru i jego równoważniki.
  13. Liczby naturalne i indukcja matematyczna. Aksjomaty Peano. Konstrukcja von Neumanna. Zasada indukcji matematycznej. Zasada indukcji zupełnej. Zasada minimum. Definicje indukcyjne. Definicje podstawowych działań arytmetycznych.
  14. Równoliczność zbiorów i liczby kardynalne. Stosunek równoliczności zbiorów i liczby kardynalne (moce zbiorów). Definicja zbioru skończonego. Porównywanie liczb kardynalnych. Twierdzenia Cantora i Cantora-Bernsteina.
  15. Zbiory przeliczalne. Zbiory nieprzeliczalne. Zbiory mocy continuum.

#### Ćwiczenia:

1. Budowanie schematów logicznych zdań języka polskiego. Wyznaczanie wartości logicznej zdania logicznie złożonego. Sprawdzanie tautologii metodą tablicy i metodą nie wprost.
2. Sprawdzanie poprawności reguł metodą tablicy i metodą nie wprost. Budowanie schematów wnioskowań i sprawdzanie, czy są to wnioskowania dedukcyjne.
3. Wyznaczanie postaci normalnych metodą tablicy. Sprowadzanie formuły do postaci normalnej metodą przekształceń równoważnościowych. Sprawdzanie, czy formuła jest tautologią i czy jest spełnialna, przez sprowadzenie do postaci normalnej. Projektowanie prostych sieci logicznych, opartych na uproszczonych alternatywnych postaciach normalnych, a także przez łączenie prostszych sieci.
4. Budowanie schematów logicznych z predykatami i kwantyfikatorami. Kwantyfikatory ograniczone i ich eliminacja. Przekształcenia równoważnościowe formuł rachunku predykatów. Proste przykłady zastosowania rachunku predykatów w reprezentacji wiedzy i programowaniu w logice.
5. System sekwentowy rachunku zdań jako przykład systemu automatycznego dowodzenia. Sprowadzanie formuł do koniunkcyjnej postaci normalnej za pomocą tego systemu. Generowanie drzewa sekwentów przy pomocy stosu.
6. Wyznaczanie sumy rodziny zbiorów i zbiorów potęgowych.
7. Wykonywanie działań sumy, iloczynu i różnicy zbiorów. Wyprowadzanie praw algebry zbiorów za pomocą aksjomatu ekstensjonalności. Ilustracja tych praw przez diagramy Venna.
8. Wyprowadzanie praw algebry zbiorów, stosując operację dopełnienia i aksjomaty algebry Boole'a.
9. Wyznaczanie złożenia relacji i relacji odwrotnej. Wyprowadzanie praw dla iloczynu kartezjańskiego i praw algebry relacji. Ilustracje algebry relacji, np. w opisie stosunków pokrewieństwa i powinowactwa oraz teorii grafów. Relacyjne bazy danych jako zastosowanie relacji wieloargumentowych ze specjalnymi działaniami.
10. Wyznaczanie dziedziny i przeciwdziedziny funkcji, funkcji odwrotnej i złożenia funkcji. Sprawdzanie, czy funkcja jest różnowartościowa i czy odwzorowanie jest suriekcją, bijekcją. Wyznaczanie obrazu i przeciwobrazu zbioru. Wyprowadzanie praw dla obrazów i przeciwobrazów. Wykonywanie działań nieskończonych i wyprowadzanie praw tych działań.
11. Sprawdzanie, czy relacja jest relacją równoważności. Wyznaczanie klas abstrakcji. Wykonywanie działań ilorazowych. Zastosowanie w relacyjnych bazach danych

12. Sprawdzanie własności relacji porządkujących. Wyznaczanie elementów najmniejszych, największych, minimalnych, maksymalnych, kresów dolnych i górnych. Konstrukcje porządku produktowego i leksykograficznego.
13. Dowodzenie podstawowych praw arytmetyki liczb naturalnych przez indukcję.
14. Własności stosunku równoliczności zbiorów i uporządkowania liczb kardynalnych.
15. Wyznaczanie mocy konkretnego zbioru.

**Przedmiotowe efekty kształcenia:**

1. E00 - Rozumie rolę logiki matematycznej w matematyce i informatyce.
2. E01 - Potrafi analizować strukturę logiczną zdań i wnioskowań na gruncie rachunku zdań.
3. E02 - Potrafi budować schematy zdań na gruncie rachunku predykatów i stosować podstawowe prawa tego rachunku.
4. E03 - Potrafi projektować proste układy logiczne.
5. E04 - Zna metody wyprowadzania podstawowych praw algebry zbiorów.
6. E05 - Potrafi wyprowadzać i stosować podstawowe prawa algebry relacji.
7. E06 - Rozumie i potrafi stosować pojęcia relacji równoważności, relacji porządkujących oraz pojęcie funkcji.
8. E07 - Zna pojęcia równoliczności zbiorów i liczby kardynalnej, potrafi posługiwać się nieskończonymi liczbami kardynalnymi.
9. E08 - Rozumie pojęcia liczby naturalnej i zbioru skończonego oraz indukcji matematycznej jako metody dowodzenia twierdzeń i definiowania pojęć (funkcji).

**Kierunkowe efekty kształcenia:**

1. KINF1\_K01 - ma świadomość wagi i rozumie znaczenie matematyki w rozmaitych zastosowaniach, w szczególności w informatyce
2. KINF1\_U04 - umie posługiwać się aparatem logiki i teorii mnogości obejmującym rachunek zdań, logikę pierwszego rzędu, algebry zbiorów, relacje; potrafi posługiwać się aparatem matematycznym do analizowania zbiorów skończonych (przeliczanie, porównywanie, przekształcanie) oraz podstawowych struktur grafowych
3. KINF1\_U01 - potrafi zastosować wiedzę matematyczną do formułowania, analizowania i rozwiązywania prostych zadań związanych z informatyką
4. KINF1\_W03 - ma podstawową wiedzę w zakresie logiki i matematyki dyskretnej (elementy logiki i teorii mnogości, kombinatoryki i teorii grafów), metod probabilistycznych i statystyki (ze szczególnym uwzględnieniem metod dyskretnych)